

Modelo GARCH-MIDAS: una aproximación al comportamiento del tipo de cambio

Álvaro M. Zevallos
alvarozevallosb@bcp.com.pe

Administración de Riesgos - BCP.
Las opiniones presentadas en este trabajo son de responsabilidad exclusiva del autor



$$\sigma^2$$

Fórmula de Black-Scholes-Merton

$$C(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-rt}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + t \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

Fórmula de Black-Scholes-Merton



Fórmula de Black-Scholes-Merton

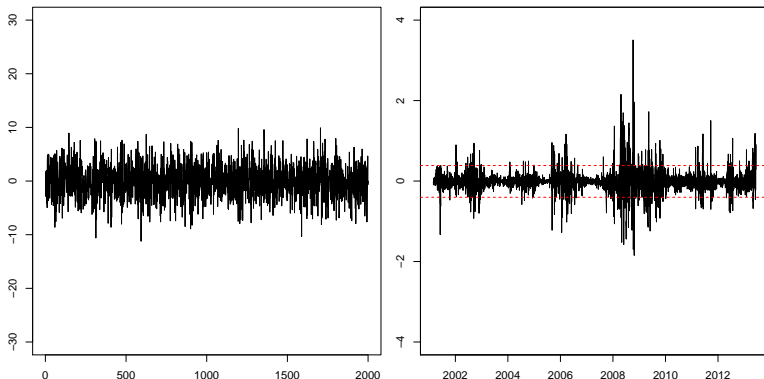
$$C(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-rt}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + t \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

¿Es la varianza constante en el tiempo? Aportes de Engle (1982) y Bollerslev (1986)

¿Es la varianza constante en el tiempo?



Evolución de una serie que sigue distribución Normal y varianza constante (panel izquierdo) y del USDPEN (panel derecho).

Modelo ARCH(1) de Engle (1982)

El modelo básico para la v.a. r está compuesto por las siguientes dos ecuaciones:

$$r_i = \mu_i + \sqrt{h_i}\varepsilon_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$h_i = \omega + \alpha(r_{i-1} - \mu_{i-1})^2$$

Donde: μ_i es la media de r para la observación i ; ε_i es el término de error (se asume $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$); h_i es la varianza de r para la observación i , la cual depende del cuadrado del término de error anterior ($r_{i-1} - \mu_{i-1}$).

Modelo GARCH(1,1) de Bollerslev (1986)

El modelo GARCH para la v.a. r está compuesto por las siguientes dos ecuaciones:

$$r_i = \mu_i + \sqrt{h_i}\varepsilon_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$h_i = \omega + \alpha(r_{i-1} - \mu_{i-1})^2 + \beta h_{i-1}$$

Donde: β es el parámetro de ajuste a la varianza anterior.

La ecuación h_i :

- Sólo tiene sentido si $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$
- Solo estacionaria si la persistencia es menor que uno ($\alpha + \beta < 1$)

¿Cómo afecta el PBI a la Bolsa de Valores? Mezclando frecuencias con Ghysels (2004) y Engle et al (2009)

Enfoque MIDAS

- Método propuesto por Ghysels (2004) para el análisis de regresión con data definida en distinta frecuencia (e.g. anual, trimestral, mensual, etc.)
- Soluciones usuales:
 - 1 Agregación Simple de Frecuencias (pérdida de información)

$$\bar{X}_t = \sum_{j=1}^{12} X_{tj}/12; \quad Y_t = \alpha + \beta \bar{X}_t + \varepsilon_t$$

- 2 Alineamiento de Frecuencias (sobre-parametrización)

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \cdots + \beta_{12} X_{t12} + \varepsilon_t.$$

Enfoque MIDAS

- Solución MIDAS: Definir una función de pesos.

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \alpha + \beta_0 X_{t-0/12}^{(12)} + \beta_1 X_{t-1/12}^{(12)} + \cdots + \beta_{11} X_{t-11/12}^{(12)} + \varepsilon_t \\
 &= \alpha + \sum_{j=0}^{K=11} \beta_j X_{t-j/12}^{(12)} + \varepsilon_t \\
 &= \alpha + \sum_{j=0}^K \beta_j L^{j/m} X_t^{(m)} + \varepsilon_t \\
 &= \alpha + \beta \sum_{j=0}^K \omega_j L^{j/m} X_t^{(m)} + \varepsilon_t \\
 &= \alpha + \beta \sum_{j=0}^K \varphi(j, K, \boldsymbol{\theta}) L^{j/m} X_t^{(m)} + \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

Enfoque MIDAS

- φ y K tienen que ser especificados antes de la estimación.
- Ghysels et al. (2015) y Engle et al. (2009) proponen las siguientes funciones:

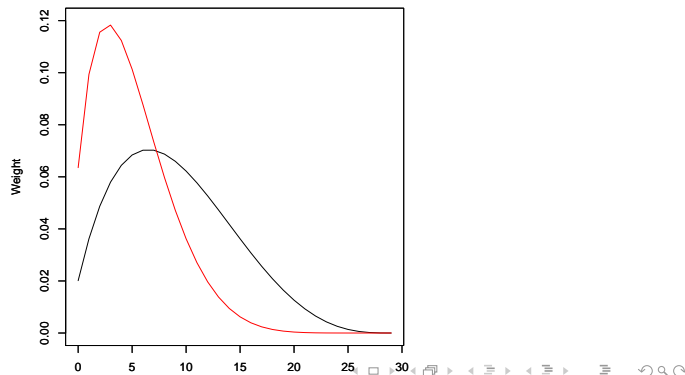
Cuadro: Funciones de Ponderación para MIDAS

Función	$\varphi(j, K, \theta) = \varrho(j, K, \theta) / \sum_{k=1}^K \varrho(k, K, \theta)$
Exponential	$\varrho(j, K, \theta) = (\theta)^j$
Beta	$\varrho(j, K, \theta_1, \theta_2) = (j/K)^{\theta_1-1} (1 - j/K)^{\theta_2-1}$
Gompertz	$\varrho(j, K, \theta_1, \theta_2) = \exp(\theta_2 j) e^{-\theta_1 \exp(\theta_2 j)}$
Log-Cauchy	$\varrho(j, K, \theta_1, \theta_2) = j^{-1} (\theta_2^2 + (\ln j - \theta_1)^2)^{-1}$
Nakagami	$\varrho(j, K, \theta_1, \theta_2) = j^{2\theta_1-1} \exp -\theta_1/\theta_2 j^2$
Exponential Almon	$\varrho(j, K, \theta_1, \dots, \theta_q) = \exp(\theta_1 j + \dots + \theta_q j^q)$

Enfoque MIDAS

Función Beta (K=30)

$$\omega_z = \varphi(z, w_1, w_2) = \frac{(z/K)^{w_1-1} (1 - z/K)^{w_2-1}}{\sum_{l=1}^K (l/K)^{w_1-1} (1 - l/K)^{w_2-1}}$$



GARCH - MIDAS con distribución Normal

Ecuación de la media

$$r_{i,t} = \mu + \sqrt{\tau_t} g_{i,t} \varepsilon_{i,t}$$

Ecuación de la varianza de corto plazo

$$g_{i,t} = \omega + \alpha \frac{(r_{i-1,t} - \mu)^2}{\tau_t} + \beta g_{i-1,t}$$

Ecuación de la varianza de largo plazo

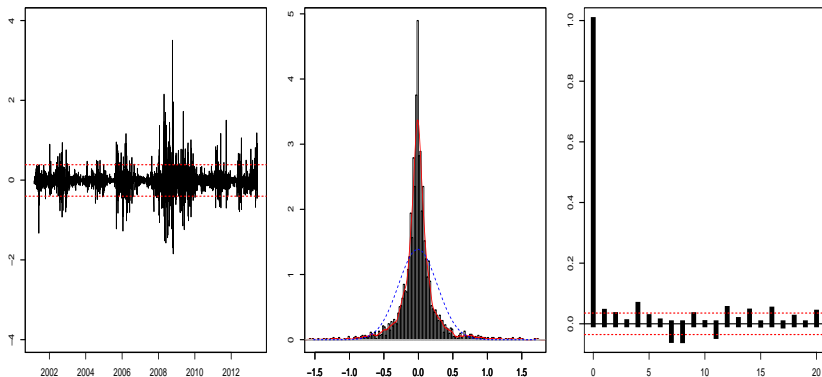
$$\tau_t = m + \theta \sum_{j=1}^J \varphi_j(w_1, w_2) x_{t-j}$$

Función de log-verosimilitud

$$llf = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_t} \left[\ln g_{i,t} \tau_t + \frac{(r_{i,t} - \mu)^2}{g_{i,t} \tau_t} \right]$$

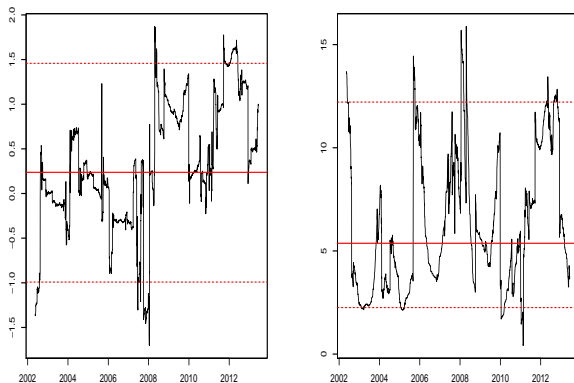
¿Todas las variables siguen una distribución Normal? El USDPEN y la Asimétrica de Laplace

¿Todas las variables siguen una distribución Normal?



Evolución de los retornos diarios (panel izquierdo), histograma (panel central) y correlograma (panel derecho) de la muestra.

¿Todas las variables siguen una distribución Normal?

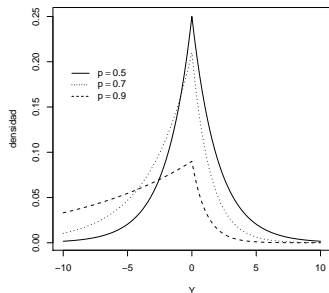
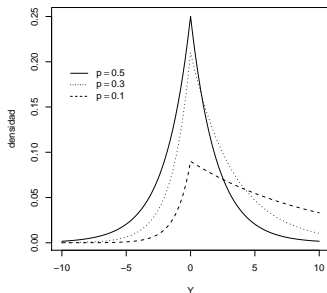


Evolución de la asimetría (panel izquierdo) y curtosis (panel derecho). Las líneas sólidas son las medianas. Las discontinuas los cuantiles 0.05 y 0.95.

¿Todas las variables siguen una distribución Normal?

Función de densidad de ALD

$$f(y; \mu, \sigma, p) = \frac{p(1-p)}{\sigma} \exp\left\{-\frac{y-\mu}{\sigma} [p - I(y \leq \mu)]\right\}$$



GARCH - MIDAS con distribución Asimétrica de Laplace

Especificación de la AL estándar

$$\varepsilon_{i,t} \sim ALD\left(\frac{2p-1}{(1-2p+2p^2)^{1/2}}, \frac{p(1-p)}{(1-2p+2p^2)^{1/2}}, p\right)$$

Función de log-verosimilitud

$$llf = \frac{N}{2} \ln(1-2p+2p^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_t} \ln(g_{i,t}\tau_t) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_t} \rho \left\{ \frac{\sqrt{(1-2p+2p^2)}(r_{i,t} - \mu) - (2p-1)}{\sqrt{\tau_t g_{i,t} p(1-p)}} \right\}$$

Estudio de Simulación

Escenarios de simulación

Los escenarios para generar las muestras fueron definidos en base a la combinación de dos factores:

- Los valores de los parámetros α y β : $\alpha = 0.8$ y $\beta = 0.1$ (c1), $\alpha = 0.45$ y $\beta = 0.45$ (c2), $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.8$ (c3), y $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.1$ (c4).
- La distribución del término de error (ε): Uniforme, Normal y Generalizada de Pareto. Errores con media cero y varianza igual a uno.

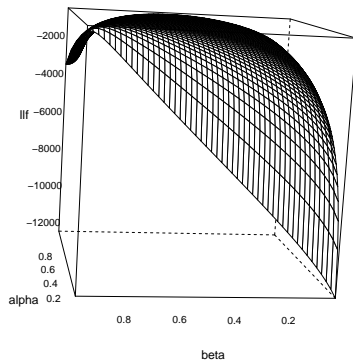
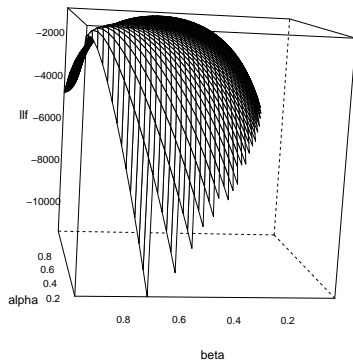
Los factores permitieron definir 12 escenarios. Para cada escenario se simularon 100 muestras de 2000 observaciones bajo la estructura GARCH(1,1). En todas las muestras se consideró $\mu = 0$, $\omega = 1$ y $h_0 = 1$.

Resultados: Sesgo y ECM

- Los modelos GARCH:N y G-M:N son superiores si la persistencia es alta y si ε se distribuye como una Uniforme o Normal.
- Si la persistencia es baja, los dos modelos GARCH-MIDAS son mejores en caso de errores con distribución Uniforme o Normal.
- Si ε se distribuye como una Generalizada de Pareto y la persistencia es alta, el mejor modelo es el GARCH:HG.
- Si ε se distribuye como una Generalizada de Pareto y la persistencia es baja, el mejor modelo es el G-M:ALD.

Aplicación del GARCH-MIDAS al USDPEN

Funciones de log-verosimilitud del USDPEN



Resultados GARCH-MIDAS con distribución Normal

	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7	
Ecuación de la media														
μ	-0.011	***	0.006		-0.009	***	-0.067	***	-0.060	***	-0.069	***	-0.069	
AR(1)			-0.034		-0.502	***	0.805	***	0.578	***	-0.466	***	0.806	***
Cobre											-0.204	***		
Oro														
Spread Embi+			0.000		0.000	***	0.000	***	0.000	***	0.000	**	0.000	
Compras netas BCRP			0.000	***	-0.012	***	-0.003	***	-0.014	***	-0.005	***	-0.022	***
Dummy periodo 3									0.755	***	-1.565	***	1.020	***
Dummy día viernes											0.889	***	0.768	***
Dummy feriados											1.077	***	0.984	
Ecuación de la varianza de c.p														
ω	0.001	***	0.000	***	0.022	***	0.014	***	0.173	***	0.144	***	0.000	
α	0.218	***	0.229	***	0.577	***	1.000	***	0.420	***	0.356	***	0.684	***
β	0.830	***	0.827	***	0.635	***	0.532	***	0.665	***	0.465	***	0.286	***
Compras netas BCRP					-0.067	***	-0.006	***	-0.267	***	-0.033	***	-0.006	***
Dummy periodo 3							1.035	***	2.740	***	1.761	***	0.392	***
Dummy día viernes									0.867	***	0.342	***	0.360	***
Dummy feriados											0.902	***	1.075	***
Ecuación de la varianza de l.p														
m	0.536	***	0.536	***	0.170	***	0.412	***	0.141	***	0.536	***	0.002	
θ PBI Perú													1.003	
θ PMI EE.UU.													0.566	***
θ Inflación Perú											0.759	***	1.133	*
θ Inflación EE.UU.											0.191	***	1.078	
w PBI Perú													1.001	
w PMI EE.UU.													1.063	**
w Inflación Perú											1.648	***	0.995	
w Inflación EE.UU.											2.018	***	1.033	

Resultados GARCH-MIDAS con distribución AL

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Ecuación de la media							
μ	-0.022 ***	-0.010	-0.023 ***	-0.069	0.058	-0.059	0.069
AR(1)		0.089	0.611 ***	-0.215 ***	0.783 ***	0.469	0.937 ***
Cobre			-0.770 ***		-0.040		-0.570 ***
Oro							0.196 ***
Spread Embi+		0.000 **	0.001 ***	0.000	0.000	0.001 ***	0.006 ***
Compras netas BCRP		0.000 **	-0.047 ***	-0.001 ***	-0.010 ***	-0.190 ***	0.000
Dummy periodo 2							1.032 **
Dummy periodo 3			0.945 ***	-0.480 ***			0.982 ***
Ecuación de la varianza de c.p							
ω	0.000 ***	0.001 ***	0.005	0.000	0.183 ***	0.028	0.007 ***
α	0.236 ***	0.212 ***	0.918 ***	0.999 ***	0.300 ***	0.959 ***	0.065 ***
β	0.812 ***	0.758 ***	0.584 ***	0.679 ***	0.866 ***	0.831 ***	0.209 ***
Compras netas BCRP			-0.466 ***	-0.148 ***	-0.076 ***	-0.240 ***	0.004 ***
Dummy periodo 2					0.368 ***		0.637 ***
Dummy periodo 3			0.942 ***	0.052	0.299 ***		0.150 ***
Ecuación de la varianza de l.p							
m	0.536 ***	0.536 ***	0.536 ***	0.536 ***	0.000	0.536 ***	0.531
θ PBI Perú							0.997
θ PMI EE.UU.							1.461 ***
θ Inflación Perú					1.243 ***	1.844 ***	0.913
θ Inflación EE.UU.					1.448 ***	1.130 ***	0.973
w PBI Perú							1.024
w PMI EE.UU.							0.842
w Inflación Perú					1.163 ***	1.539 ***	0.990 **
w Inflación EE.UU.					0.982 ***	0.736 ***	0.954
Parámetro de asimetría							
p	0.51 ***	0.489 ***	0.575 ***	0.685 ***	0.492 ***	0.178 ***	0.357 ***

Pesos de regresores de largo plazo

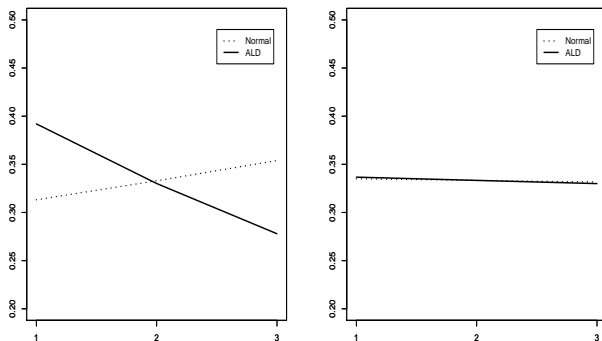


Figura: Pesos obtenidos para el PMI de EE.UU. (panel izquierdo) y los niveles de inflación (panel derecho). El número del eje horizontal indica si el peso corresponde al último dato (1), penúltimo (2) o antepenúltimo (3).

Conclusiones

Conclusiones e Ideas Fuerza

- Necesitamos en nuestro *toolkit* herramientas para modelar el comportamiento heterocedástico de v.a.
- El Trabajo con data de distinta frecuencia requiere de soluciones nuevas. MIDAS es un enfoque para ello.
- El modelo GARCH-MIDAS es similar o superior al GARCH tradicional en la mayoría de escenarios de simulación.
- La ventaja del GARCH-MIDAS es clara cuando la persistencia es baja.
- Al aplicar la metodología al retorno del USDPEN se confirmaron algunas regularidades empíricas: el efecto cercano a cero del $EMBI+$, β mayor que α y magnitud de persistencia dependiendo del modelo.
- Modelar la varianza de largo plazo brindó nuevos hallazgos: efectos positivos y significativos sobre la varianza del PMI de EE.UU. y el nivel de inflación de Perú.

Modelo GARCH-MIDAS: una aproximación al comportamiento del tipo de cambio

Álvaro M. Zevallos
alvarozevallosb@bcp.com.pe

Administración de Riesgos - BCP.
Las opiniones presentadas en este trabajo son de responsabilidad exclusiva del autor

